1 Systèmes d'équations linéaires

1.1 Systèmes d'équations linéaires

Définition 1.1 *Équation linéaire*

Une équation linéaire est une équation que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

où :
- les x_i sont les inconnues
- les a_i sont les coefficients
- b est le second membre

Les coefficients a_i et le second membre b sont des constantes indépendantes des inconnues x_i. En général, ils sont donnés par une situation pratique.

Exemples. Les équations suivantes sont linéaires.

- $3x_1 - 2x_2 = 4$
- $3x - 2y + z = 6$. Bien sûr, le nom donné aux inconnues $(x_1, x_2, x_3$ ou $x, y, z)$ n'est pas important.
- $3x_2 - 2x_1 = 6 - 4x_3$ est linéaire car on peut l'écrire sous la forme $-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6$
- $\sqrt{3}x - \frac{y}{3} = 4t$. Si t est une constante, alors cette équation est linéaire d'après la définition. Si t est une inconnue, alors l'équation peut être écrite sous la forme $\sqrt{3}x - \frac{y}{3} - 4t = 0$.

Les équations suivantes ne sont pas linéaires :
- $3\sqrt{x} - y = 0$
- $3x_1 \cdot x_2 = 4$
- $3x_1^2 - 2x_1 = 5$

1.2 Système d'équations linéaires

Définition 1.2 *Système d'équations linéaires*

Un système d'équations linéaires est un ensemble d'une ou plusieurs équations linéaires.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \quad\vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

- C'est un système à m équations et n inconnues.
- Les a_{ij} sont les coefficients. i désigne la i–ème équation et j désigne la j–ème inconnue.
- Les b_i constituent le second membre du système.

Exemples.

— $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & -4x_3 = 5 \\ 4x_1 & +2x_3 = 6 \end{cases}$

— $\begin{cases} 4{,}5x_1 - 3x_2 + \pi x_3 - 4x_4 = 8 \\ 3{,}6x_1 + \sqrt{9{,}5}x_2 + \dfrac{3}{9}x_3 - 6x_4 = 14{,}5 \\ 12x_1 + x_2 - x_3 + \dfrac{\sqrt{9}}{2}x_4 = 0 \end{cases}$

1.2.1 Solutions d'un système d'équations linéaires

Définition 1.3 *Solution d'un système d'équations*

Une solution d'un système d'équations à n inconnues est une liste $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ de nombres qui transforme chaque équation en une égalité vraie quand on substitue s_1 à x_1, s_2 à x_2, ..., s_n à x_n.
Résoudre un système consiste à trouver l'ensemble de ses solutions.
Un système qui admet au moins une solution est dit compatible, ou consistant. S'il n'admet pas de solution, il est incompatible, ou inconsistant.
Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemples.

1. $(2,3)$ est une solution de $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ car $\begin{cases} 3 \times 2 - 2 \times 3 = 0 \\ 4 \times 2 + 3 = 11 \end{cases}$

   Ce système est donc compatible.

2. Les systèmes suivants sont équivalents : $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ et $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$

3. Le système $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ est incompatible.

4. On notera généralement $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions d'un système.

   Si le système m'a pas de solution, on notera $\mathcal{S} = \emptyset$. Le symbole $\emptyset$ représente l'ensemble vide.

   Nous utiliserons la notation $\{\dots\}$ pour désigner un ensemble. Par exemple : $\mathcal{S} = \{(2;3)\}$ signifie que l'ensemble des solutions contient uniquement le point $(2;3)$.

   Lorsque l'on veut définit un ensemble par une propriété, on écrira $\{\dots|\dots\}$. Par exemple $\mathcal{S} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 1\}$ signifie que l'ensemble des solution est l'ensemble des couples $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$ qui satisfont la propriété $x + y = 1$.

Remarque 1.4. *Il est alors naturel de se demander :*

— *Un système a-t-il toujours une solution ?*
— *S'il en a, en a-t-il une seule ou plusieurs ? Combien ?*
— *Comment déterminer ces solutions ?*
— *Comment le faire « rapidement » ?*

Théorème 1.5

Un système d'équations linéaires ne peut être que dans l'une de ces trois situations :

1. Il n'admet pas de solution
2. Il admet une solution unique
3. Il admet une infinité de solutions

Démonstration. Admis pour l'instant.

Idée : si les listes $(s_1, \ldots, s_n)$ et $(t_1, \ldots, t_n)$ sont deux solutions, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la liste $(\lambda s_1 + (1-\lambda)t_1, \ldots, \lambda s_n + (1-\lambda)t_n)$ est aussi solution. □

Vous savez déjà résoudre un système d'équations linéaires pour des petits m et n. Résoudre un système de m équations à n inconnues est « facile » si $n = m = 2$, 3, 4... Mais si $n = 10^9$ et $m = 3{,}2 \times 10^8$?

Il faudra donc avoir une méthode claire et efficace.

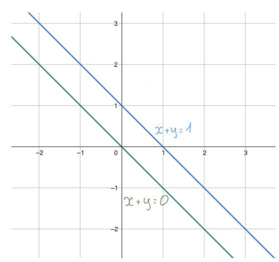
1.2.2 Interprétation graphique pour $n = 2$ et $n = 3$

Si $n = 2$, chaque équation correspond à l'équation cartésienne d'une droite, et il y a alors quatre cas possibles :

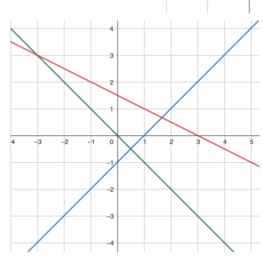
1. Les droites sont parallèles et le système n'a pas de solution
2. Les droites ne sont pas parallèles, mais elles n'ont pas de point d'intersection commun. Le système n'a alors pas de solution
3. Les droites se croisent en un point qui correspond à l'unique solution
4. Les droites sont confondues ou il n'y a qu'une seule droite. Le système a une infinité de solutions qui sont tous les points de cette droite.

Exemples.

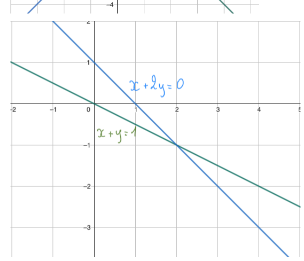
1. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$



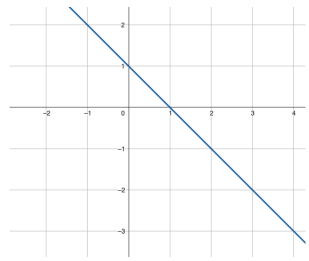
2. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + -y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$



3. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$



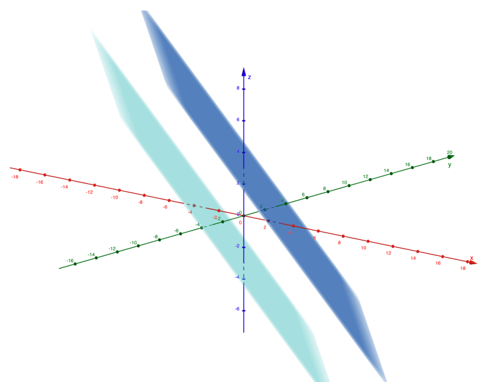
4. $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ \quad x + y = 1 \end{cases}$



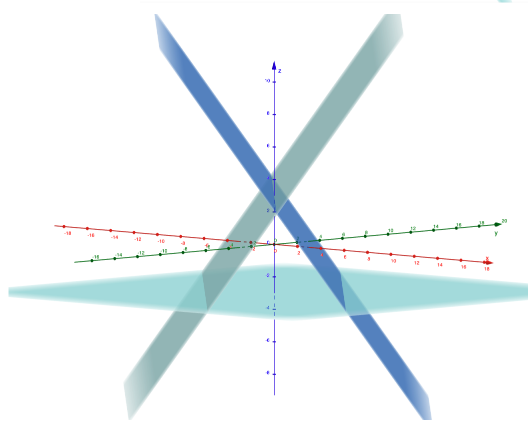
Si $n = 3$, chaque équation est représentée par un plan. Il y a alors cinq situations possibles :

1. Au moins deux plans sont parallèles et et distincts. Le système n'a alors pas de solution.
2. Tous les plans se croisent deux à deux, mais il n'y a pas d'intersection commune à tous les plans. Le système n'a alors pas de solution.
3. Tous les plans se croisent en une droite. Il y a alors une infinité de solutions, et elles sont toutes sur cette droite.
4. Tous les plans se croisent en un point qui correspond alors à l'unique solution du système.
5. Tous les plans sont confondus ou il n'y a qu'un plan. Le système a alors une infinité de solutions qui sont tous les points de ce plan.

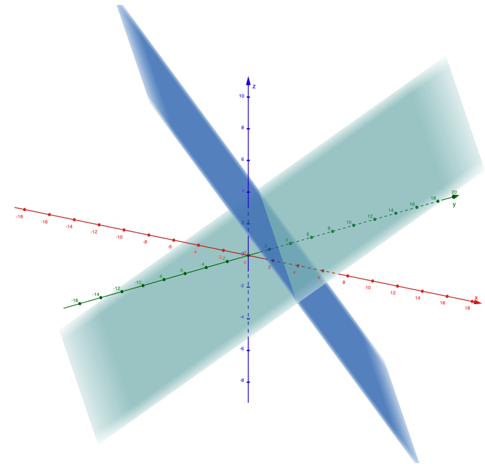
Exemples. 1. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$



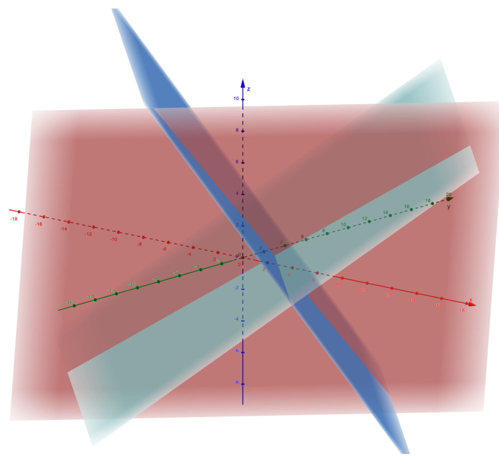
2. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x - y + z = 3 \\ z = 0 \end{cases}$



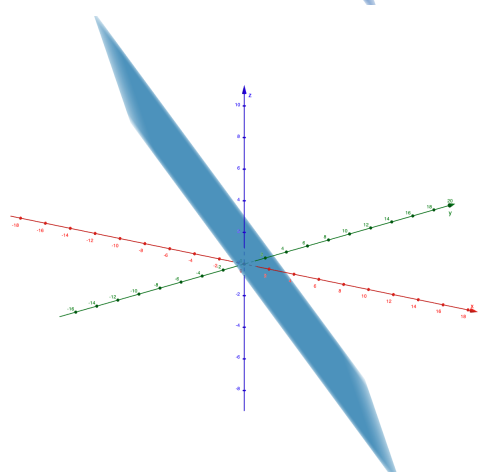
3. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-2z=2 \end{cases}$



4. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-2z=2 \\ x-y-z=1 \end{cases}$



5. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \end{cases}$



1.3 Opérations élémentaires

Idée : transformer un système « complexe » en un autre « simple ». Voici un système « simple » :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

Il est simple, parce que l'on peut le résoudre de bas en haut : $x_3 = 5$ donc $x_2 = -13$, donc $x_1 = 37$.

Même si n et m sont très grands, si un système a cette structure particulière, triangulaire, alors il est simple à résoudre. La suite de ce chapitre va consister à construire un algorithme qui permet de faire cela.

Définition 1.6 *Opérations élémentaires*

Soit un système de m équations à n inconnues, on note L_i la i–ème ligne :

$$L_i : a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i.$$

Les trois opérations sur les lignes suivantes sont appelées opérations élémentaires.

Opération élémentaire de type 1 Échanger les lignes i et j :

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

Opération élémentaire de type 2 Multiplier la i–ème ligne par un nombre λ non nul :

$$L_i \leftarrow \lambda L_i$$

Opération élémentaire de type 3 Ajouter à une équation un multiple d'une autre :

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

Exemple.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 = 18 \end{cases}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 5x_2 = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Remarque 1.7. *Ces opérations élémentaires sont réversibles, c'est-à-dire que l'on peut reprendre les calculs en sens inverse.*

Théorème 1.8

Si on peut obtenir un système d'équations $(*)_1$ à partir d'un système d'équations $(*)_2$ par une suite finie d'opérations élémentaires, alors les deux systèmes sont équivalents.

Démonstration. **Idée :** Si $(s_1, \dots, s_n)$ est une solution de $(*)_1$, alors en remplaçant les x_i par les s_i, les égalités sont vraies. Or, si les égalités L_i et L_j sont vraies, λL_i et $L_i + \lambda L_j$ sont vraies. Inverser les lignes ne change pas non plus la véracité des égalités □

Donc pour résoudre un système, on va méthodiquement le transformer en un système équivalent « simple ». C'est le thème de la section suivante.

1.4 Matrices et algorithme de Gauss-Jordan

1.4.1 Matrices

On peut commencer par noter différemment un système d'équations linéaires. Disons pour l'instant que c'est par souci d'efficacité et de simplification. Voyons cela sur un exemple.

Exemple. Pour le système $\begin{cases} x_1 + \ 2x_2 \qquad\quad = 4 \\ 5x_1 + \ 6x_2 + \ 7x_3 = 8 \end{cases}$, on va noter : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

Il n'y a aucune ambiguïté, les deux notations sont équivalentes.

Exemple. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ correspond au système $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 10x_2 = 0 \end{cases}$

Plus généralement :

Définition 1.9 *Matrice augmentée*

Pour un système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

on définit la matrice des coefficients

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

et la matrice augmentée

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

On peut aussi noter :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

pour distinguer le second membre des coefficients du système.
La matrice augmentée contient m lignes qui correspondent aux m équations, et $n+1$ colonnes qui correspondent aux inconnues et au second membre.

Remarque 1.10. *La notation suivante est aussi une notation usuelle pour les matrices :*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

Le i de a_{ij} correspond à la i–ème ligne et le j à la j–ème colonne. Comme il y a m lignes et n colonnes, i varie de 1 à m et j varie de 1 à n.

On dira de manière équivalente qu'une matrice a m lignes et n colonnes, ou qu'une matrice est de taille $m \times n$.

Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système sont équivalentes aux opérations sur les lignes d'une matrice.

Définition 1.11 *Matrices ligne-équivalentes*

On dira que deux matrices sont ligne-équivalentes si elles peuvent être obtenues l'une à partir de l'autre à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. On notera alors, pour deux matrices A et B équivalentes : $A \sim B$.

Remarque importante 1.12

De manière évidente, deux matrices ligne-équivalentes correspondent à deux systèmes équivalents.

Pour résoudre un système, on va donc « oublier » le système, et travailler sur sa matrice augmentée. On va échelonner la matrice, comme décrit dans la section suivante.

Remarque 1.13. *Attention ! On parle bien d'opérations sur les lignes de la matrice, pas sur les colonnes ! Les solutions du système ne varient pas après des opérations* ***sur les lignes****.*

1.4.2 Matrices échelonnées-réduites

Définition 1.14 *Matrice échelonnée*

1. Le coefficient principal de la i–ème ligne est, s'il y en a un, le premier coefficient non nul sur cette ligne, en partant de la gauche.
2. Une matrice est échelonnée si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
   (a) Les lignes nulles (si elles existent) sont regroupées en bas de la matrice.
   (b) Si elle possède des lignes non-nulles, alors le coefficient principal de chacune de ces lignes se trouve strictement à droite de celui de la ligne de dessus.

coefficients principaux

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \text{lignes de } 0 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{bmatrix} \times & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \times & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

escalier des coefficients principaux